** ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP 12**

**I. GIẢI TÍCH**

VẤN ĐỀ 1 . TẬP XÁC ĐỊNH, TẬP GIÁ TRỊ, TÍNH CHẴN LẺ CỦA HÀM SỐ

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số

1. Nêu định nghĩa tập xác định của hàm số

2. Tìm tập xác định của hàm số

a)  Đs: *D* =

b)  Đs: *D* = **0c95a37acc94ef8c093ce39c36e07886**

c)  Đs: *D* =

d)  Đs: *D* = {aad446a8d8da5fce92d662dcd1952666}

e) 

3\*. Tìm a để hàm số  xác định trên **0c95a37acc94ef8c093ce39c36e07886**

4\*. Biện luận theo m tập giá trị của hàm số 

Dạng 2. Tim tâp giá trị của hàm số

5. Nêu định nghĩa miền giá trị của hàm số

6. Tìm miền giá trị của hàm số

a) Đs: 

b) Đs: 

7\*.Tìm miền giá trị của hàm số .

8\*.Tìm miền giá trị của hàm số  với  . Đs: 

Dạng 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

9. Nêu định nghĩa hàm số chẵn, hàm số lẻ?Nêu phương pháp xét tính chẵn, lẻ của hàm số

10. Xét tính chãn lẻ của hám số

a)  Đs: Lẻ trên **0c95a37acc94ef8c093ce39c36e07886**

b)  Đs: Lẻ trên **0c95a37acc94ef8c093ce39c36e07886**

c)  Đs: Chẵn trên [-1;1]

d)  Đs: Lể trên **0c95a37acc94ef8c093ce39c36e07886 \ **

e) 

VẤN ĐỀ 2. SỰ ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

**Dạng 4. Tìm khoảng đồng biên nghịch biến của hàm số**

\* Cho hàm số  có tập xác định la khoảng (a;b).

+ Nếu   và dấu băng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên (a;b)

+ Nếu   và dấu bằng chỉ xảy ra rại điểm hữu hạn thì hàm số nghịch biến trên (a;b)

\* Cách tìm khoảng đồng biến nghịch biến

Bước 1. Tìm các điểm giới hạn

Bước 2. Xác định dấu của .

Bước 3. Lập bảng biến thiên suy ra khoảng đồng biến nghịch biến.

1. Tìm khoảng đồng biến nghịch biến của hàm số

a)  Đs: Đồng biến trên  và

b)  Đs: Đồng biến trên (0;1), nghịch biến trên (1;)

c)  Đs: Đồng biến trên (0;2) , nghịch biến trên (2;4)

d)  Đs: Đồng biến trên (-2;2), nghịch biến trên () và

3. Tìm khoảng đồng biến nghịch biến của hàm số

a) 

Đs: Đồng biến trên , nghịch biến trên , 

4. \*Tìm khoảng đơn điệu của hàm số

a)  Đs: Đồng biến trên **0c95a37acc94ef8c093ce39c36e07886**

b**) ** Đs: Đồng biến trên 

c) , *x* Đs: Đồng biến trên  và , nghịch biến trên 

**Dạng 5. Ứng đụng của đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức**

5. Chưng minh các bất đẳng thức sau đây

a) *tan* > *sin*, 0 <  <  Hd: Xét  trên 

b) 

c) 

d) 

6. Tìm m để hàm số

a)  nghịch biến trên . Đs: 

b)  đồng biến trên khoảng  Đs: 

c)  đồng biến trên toàn trục số Đs: m 

**Dạng 6. Ứng dụng của đạo hàm để biện luận số nghiệm của phương trình**

7. Tìm m để phương trình

a)  có 4 nghiệm phân biệt. Đs: 0 < m < 1

b)  có 3 nghiệm phân biệt. Đs – 1 < m < 3

8. Tìm m để dường thẳng  cắt đồ thị  tại 3 điểm phân biệt

Đs:-4 < m < 0

**vÊn ®Ò 3: cùc trÞ cña hµm Sè**

1. Nªu ®Þnh nghÜa ®iÓm cùc ®¹i, cùc tiÓu cña hµm sè?

2. Nªu ph­¬ng ph¸p t×m ®iÓm cùc trÞ cña hµm sè?

3. Nªu ph­¬ng ph¸p 2 ®Ó t×m ®iÓm cùc trÞ cña hµm sè?

4. T×m ®iÒu kiÖn cÇn vµ ®ñ ®Ó hµm sè y = ax3 + bx2 + cx + d, (a # 0) cã cùc trÞ?

5. T×m ®iÒu kiÖn cÇm vµ ®ñ ®Ó hµm sè = , (a.m # 0) cã cùc trÞ?

6. T×m ®iÒu kiÖn cÇn vµ ®ñ ®Ó hµm sè y = ax4 + bx2 + c, (a # 0) cã cùc trÞ?

7. Chøng minh r»ng nÕu hµm sè y  ®¹t cùc trÞ t¹i x = x0 th× (y (x0 ) = . H·y ¸p dông víi hµm sè y = , (a. m # 0).

8. Chøng minh r»ng nÕu hµm sè y = ax3 + bx2 + cx + d, (a # 0) ®¹t cùc trÞ t¹i x = x0 th× y (x0) = mx0 + n víi ax3 + bx2 + cx + d = (ex + g) (3ax2+2bx+c)+ (mx+n).

9. T×m c¸c ®iÓm c­c trÞ cña c¸c hµm sè trong bµi tËp 5, bµi tËp 7 ë trªn.

10. Chøng minh r»ng hµm sè y =  lu«n cã cùc ®¹i vµ cùc tiÓu víi mäi m.

11. T×m c¸c ®iÓm cùc trÞ cña c¸c hµm sè y = sin2x §s: XC§ = +kπ, xCT=kπ

12. T×m c¸c hÖ sè a, b, c sao cho hµm sè y = x3+ ax2+ bx + c ®¹t cùc trÞ b»ng 0 t¹i ®iÓm x = - 2, vµ ®å thÞ hµm sè ®i qua ®iÓm A (1,0). §s: a=3, b=0, c =-4.

13. T×m c¸c hÖ sè a, b, c, d sao cho hµm sè y = ax3 + bx2 + cx + d ®¹t cùc tiÓu t¹i ®iÓm x = 0, f (0) = 0 vµ ®¹t cùc ®¹i t¹i x = 1, f (1) = 1 §s: a =-2, b=3, c=0, d=0

14. Víi gi¸ trÞ nµo cña m ®Ó hµm sè y = x2 - 3mx2 + (m2 - 1) x + 2 ®¹t cùc ®¹i t¹i x=2

15. X¸c ®Þnh m ®Ó hµm sè x = ®¹t cùc ®¹i t¹i x = 2.

16. Gäi (Cm) lµ ®å thÞ hµm sè y =  (Cm) chøng minh r»ng víi m bÊt kú; ®å thÞ (Cm) lu«n lu«n cã ®iÓm cùc ®¹i, ®iÓm cùc tiÓu vµ kho¶ng c¸ch gi÷a hai ®iÓm ®ã b»ng .

17. T×m a, b ®Ó c¸c cùc trÞ cña hµm sè y = a2x3 + 2ax2 - 9x + b ®Òu lµ nh÷ng sè d­¬ng vµ x0 =  lµ ®iÓm cùc ®¹i §s: a = 

18. T×m m ®Ó hµm sè

a) y = m3 - 3mx3 + 3 (m2- 1) x - (m2- 1) ®¹t cùc ®¹i t¹i x = 1 §s: m = 2

b. y = (x - m)2 - 3x ®¹t cùc tiÓu t¹i x = 0 §s: m = - 1

19. T×m m ®Ó c¸c hµm sè sau cã cùc trÞ

a) y = m3 - 6m3 + 3 (m2 + 2) x - m - 6 cã cùc trÞ §s: -  < m <

) y =  cã cùc trÞ §s: - < m < 

20. T×m m ®Ó c¸c hµm sè sau cã cùc trÞ tho¶ m·n ®iÒu kiÖn cho tr­íc.

a) y = x4 + 2 (m - 1)m2 + m + 5 cã 3 cùc trÞ §s: m < 1

b) y =  x3 - x + m cã hai cùc trÞ tr¸i dÊu §s: -  < m < 

c) y = - x3 + 3 (m+1)x2 - (3m + 7m-1) x + m2 - 1 ®¹t cùc tiÓu t¹i mét ®iÓm cã hoµnh ®é nhá h¬n 1 §s: m < 1

e. y = x3 + 2 (m - 1)x2 + (m2-4m+1) x - 2m2- 2 cã hai cùc trÞ x1, x2 tho¶ m·n ®iÒu kiÖn 

g) y =  cã hai cùc trÞ (x1, y1) sao cho kho¶ng c¸ch gi÷a chóng b»ng 10

§s: m > - 1, m = 4

h. y=cã hai cùc trÞ n»m cïng vÒ mét phÝa so víi ®­êng th¼ng 2x-y=0 §s: m < 3, -2 - 2 < m < -2 + 2

h1) y = x3-3x2 + m2 + m cã hai cùc trÞ ®èi xøng nhau qua ®­êng th¼ng x-2y-5=0.

§s: m = 0

i) y = x3 + (m - 2) x2 + (5m + 4) x + m2 + 1 ®¹t cùc trÞ t¹i x1, x2, sao cho x1 < -1 < x2 §s: m < - 3

k) y = x3 + mx2 - x + m + 1 cã hai ®iÓm cùc trÞ (x1, y1), (x2, y2) sao cho kho¶ng c¸ch gi÷a chóng nhá nhÊt §s: dmm=  ⇔ m = 0

d) y = sin2 x -  cos x, x ∈ [0; π] §s: C§ ()

e) y = sin2 x - sin x víi x ∈ [0,2π)

§s: §B trªn , NB trªn 

**VẤN ĐỀ 6. ĐIỂM CỐ ĐỊNH. TÂM ĐỐI XỨNG VÀ TRỤC ĐỐI XỨNG**

**Dạng 1. Tìm điểm cố định của họ đường cong**

• *Định nghĩa:* Cho họ đường cong phụ thuộc tham số m. Điểm gọi là *điểm cố định* của họ đường cong  nếu 

• *Cách giải*: Để tìm điểm cố định của họ đường cong ta có

*Bước 1*: Gọi điểm cố định là . Suy ra 

*Bước 2*: Sắp xếp  theo phương trình ẩn m bậc giảm dần, chẳng hạn nếu là bậc 2 thì có dạng 

*Bước 3*: Khi đó . Điều này chỉ xảy ra tất cả các hệ số ẩn m bằng 0 

*Bước 4*: Kết luận.

1. Tìm các điểm cố định của các họ đường cong

a) (Cm) : Đs: M (1; 2)

b) (Cm) : Đs: M (2; 0)

1. Tìm các điểm cố định của các họ đường cong

a) (Cm) : . Đs: 

b) (Cm) :.Đs:

1. \* Chứng minh rằng  đồ thị hàm số  luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định. Đs: (-1;-2), f’(-1) =1

**Dạng 2. Tìm tâm đối xứng và trục đối xứng**

1. Tìm tâm đối xứng của đồ thị hàm số

a) . Đs: 

b) . Đs: 

c). Đs:

1. Tìm trục đối xứng của đồ thị hàm số

a) . Đs: 

b) . Đs: 



1. Chứng minh rằng d:  là trục đối xứng của đồ thị hàm số 

**VẤN ĐỀ 8. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

Quy trình khảo sát và vẽ đồ thị hàm số 

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2: Sự biến thiên

a) Chiều biến thiên

o Tính 

o Tìm các nghiệm của và các điểm làm cho  không xác định.

o Xét dấu của suy ra chiều biến thiên của hàm số

b) Tìm cực trị

c) Tìm giới hạn và tiệm cận

d) Lập bảng biến thiên

*Bước 3*: Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị

**Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm đa thức**

**1.** a) Khảo sát và vẽ đồ thị  của hàm số 

b) Từ đồ thị  của hàm số  biện luận số nghiệm của phương trình  theo tham số 

**2.** a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số 

b) Từ đồ thị của hàm số , biện luận số nghiệm của phương trình  theo tham số 

**Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm phân thức**

**3.** a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số 

b) Viết phương trình các đường thẳng đi qua  và tiếp xúc với 

c) Tìm tất cả các điểm trên có toạ độ là các số nguyên

**4.** a) Khảo sát và vẽ đồ thị  của hàm số 

b) \* Gọi M là điểm bất kỳ trên . Tiếp tuyến của tại M cắt tiệm cận đứng tại , tiệm cận xiên tại . Chứng minh rằng là trung điểm của  và tam giác  có diện tích không đổi, với  là giao điểm của hai tiệm cận

*Hướng dẫn*: Gọi  Tiếp tuyến 

Gọi 



**Bài tập luyện tập**

**5.** Cho hàm số 

a) Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định



b) Tìm để đường tiệm cận đứng của đồ thị đi qua  Đs: 

c) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi 

**6.** Cho hàm số 

a) Tìm để đồ thị của hàm số đi qua điểm 

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi 

**7.** Cho hàm số  có đồ thị 

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số 

b) Tìm các điểm trên đồ thị  có toạ độ là những số nguyên.

Đs: 

c) Dựa vào  hãy vẽ đồ thị 

*Trong các bài tập 8, 9, 10, 11, chọn đáp án đúng và giải thích.*

**8.** Cho hàm số  có đồ thị là . Chọn mệnh đề sai.

a) Đồ thị  cắt trục *Ox* tại hai điểm phân biệt.

b) Đồ thị  có các điểm cực trị là 

c) Đồ thị  có hai tiệm cận là 

d) Đồ thị  có tâm đối xứng là 

**9.** Cho hàm số  có đồ thị là . Chọn mệnh đề sai.

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng và .

b) Đồ thị có tiệm cận là 

c) Hàm số không có cực trị

d) Đồ thị có tâm đối xứng là 

**10.** Cho hàm số  có đồ thị là . Chọn mệnh đề sai

a) Đồ thị có các điểm cực trị là .

b) Đồ thị cắt trục *Ox* tại 3 điểm phân biệt

c) Đồ thị có tâm đối xứng là 

d) Hàm số trên có 3 khoảng đơn điệu

**11.** Cho hàm số  có đồ thị là . Chọn mệnh đề sai.

a) Đồ thị có các điểm cực trị là 

b) Đồ thị có các điểm uốn là 

c) Đồ thị  không cắt trục *Ox*

d) Đồ thị có ba khoảng đơn điệu

**VẤN ĐỀ 9: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG CONG. QUỸ TÍCH.**

**ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIA TRỊ TUYỆT ĐỐI.**

Dạng 1.Vị trí tương đối hai đường cong

* Số giao điểm của hai đồ thị (*C*1): *y = f* (*x*) và (*C*2): *y = g* (*x*) cũng bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm: *f* (*x*) = *g* (*x*).

1. Cho đường cong (*C*) : và đường thẳng *dm* : *y* = 2*x* + *m*. Tìm *m* để:

|  |  |
| --- | --- |
| a) (*C*), *dm* không có giao điểm | Đs: −4 < m < 4 |
| b) (*C*), *dm* có 1 giao điểm | Đs: m = ±4 |
| c) (*C*), *dm* có 2 giao điểm | Đs: m |
| d) (*C*), *dm* tiếp xúc. Tìm tiếp điểm | Đs: m = ±4, (−2;0), (0;−4) |

1. Cho hàm số 
2. Cho hàm số (*Cm*) : *y* = –*x*3 + 3*mx*2 +3(1– *m*2)*x* + *m*3 –*m*2 .
   1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (*Cm*) khi *m* =1.
   2. Tìm k để phương trình –*x*3 + 3*x*2 + *k*3 − 3*k*2 = 0 có ba nghiệm phân biệt
3. Tìm m để hàm số *y* = −*x*4 +2*mx*2 −2*m* + 1 cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt lập thành cấp số cộng. Xác định cấp số cộng ứng với mỗi m tìm được. Đs: < *m* ≠ 1,*m* =5, *m* =.

Dạng 2.Quỹ tích

1. Cho hàm số có đồ thị (*C*).
2. Chứng minh rằng đường thẳng *d* : *y* = 2*x* + *m* luôn cắt (*C*) tại hai điểm phân biệt *M, N*.

Tìm tập hợp trung điểm *I* của đoạn thẳng *MN*.

Hd: Phương trình hoành độ giao điểm của (*C*) và *d* là *g*(*x*) = *x*2 + (*m*+1)*x* + *m*−3 = 0. Phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt vì *∆* = (*m*− 3)2 + 16 > 0, *g*(−1) = −2 ≠ 0.

Phương trình này có hai nghiệm



Vậy quý tích *I* là đường thẳng *y* = −2*x* −1

1. Xác định *m* để đoạn *MN* ngắn nhất.

Hd: *MN* =. Do đó *MN.*

1. Cho hàm số *y* = *x*3 – 3*x*2 + có đồ thị (*C*). Gọi *d* là đường thẳng đi qua *A*( −1; −2) và có hệ số góc *k*.
   * 1. Tìm *k* để *d* cắt (*C*) tại ba điểm phân biệt *A, M, N*.

Đs: 

1. Với điều kiện câu a), hãy tìm tập hợp trung điểm *I* của đoạn thẳng *MN* khi k thay đổi.

Đs: ∆:*x* = 2, −2< *y* ≠ 25.

1. Cho hàm số *y* = *x*3 – 6*x*2 + 9*x*. tìm *m* để đường thẳng *d*: *y* = *mx* (*C*) tại ba điểm phân biệt *O, A, B*. Chứng minh rằng khi m thay đổi, trung điểm *I* của *AB* luôn nằm trên một đường thẳng song song với trục *Oy*.
2. Cho hàm số *y* = *x*3 + 3*x* có đồ thị (*C*) và đường thẳng *d*: *y* = *m*(*x* – 3) và *A*(3:0). Tìm *m* để *d* cắt (*C*) tại ba điểm *A, B, C*. Tìm tập hợp trung điểm *I* của đoạn thẳng *BC*.

Đs: −6 ≠ *m* <, (∆) : *x* =, < *y* ≠ 36

Dạng 3. Đồ thị của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Cho hàm số *y = f*(*x*)*=* 2*x*3 *−* 3*x*2 *+*1có đồ thị là (*C*).
   * + 1. Khảo sát và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.
       2. Từ đó suy ra đồ thị của các đường cong:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| (*C1*): *y =* | (*C2*): *y = f* | (*C3*): *y =* | (*C4*): |

(*C5*): *y* = │*u*(*x)*│v(x), với *f*(*x*) *= u*(*x*)*.v*(*x*); *u*(*x*) *= x −* 1, *v*(*x*) *=* 2*x*2 *– x –* 1.

1. Cho hàm số *y = x*3 *– 3x*2 có đồ thị (*C*).
   1. Khảo sát và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số
   2. Từ đồ thị (*C*) hãy suy ra đồ thị

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (*C1*): *y =*│*x*3│*−*3*x*2 *+* 4*,* | (*C2*): *y =*│*x*3 *–* 3*x*2 *+* 4│*,* | (*C3*):│*y*│*= x*3 *–* 3*x*2 *+* 4 |

**VÊn ®Ò 8. Ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn**

**D¹ng 1. Ph­¬ng tr×nh tiÕp t¹i mét ®iÓm.**

\* Chän hµm sè y = f (x) cã ®å thÞ (C) vµ ®iÓm M (x0; y0) thuéc (C). Khi ®ã ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn t¹i M cã d¹ng y = f’ (x0)(x-x0) + y0.

1. Cho hµm sè y = x3 + 3x2 – 2 cã ®å thÞ (C). ViÕt ph­¬ng tr×nh tiÕp cña (C) biÕt

a. TiÕp ®iÓm cã hoµnh ®é x0 = -1 §s: y = -3x - 3

b. TiÕp ®iÓm cã tung ®é y0 = 2 §s: y = 2, y = 9x – 7

**D¹ng 2. Ph­¬ng tr×nh tiÕp qua mét ®iÓm**

* §Ó lËp ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn cña hµm sè y = f(x) cã ®å thÞ (C) ®i qua ®iÓm

A(x1;y1), ta cã hai c¸ch:

*C¸ch 1:*

*B­íc 1:* Gäi tiÕp ®iÓm lµ M(x0; f (x0)) ⇒ Ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn t¹i M lµ

y = f’ (x0)(x=x0) + f (x0).

*B­íc 2:* V× ®iÓm tiÕp tuyÕn ®i qua ®iÓm A (xA; yA) nªn yA = f’(x0)(xA-x0) + f (x0)

*B­íc 3:* Tõ ®ã t×m ®­îc x0 vµ suy ra ®­îc ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn.

\* Chó ý: §å thÞ hai hµm sè y = f(x) vµ y = g (x) tiÕp xóc nhau ⇔ hÖ 

cã nghiÖm

*C¸ch 2:*

*B­íc 1:* Gäi ®­êng th¼ng qua ®iÓm A lµ d: y = k (x-x1) +yA.

*B­íc 2*: d lµ tiÕp tuyÕn cña (C) ⇔ hÖ sau cã nghiÖm 

*B­íc 3:* Thay (2) vµ (1) ⇒ x ⇒ k ⇒ Ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn.

2. ViÕt ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn cña ®å thÞ hµm sè y = x3-3x+2, biÕt tiÕp tuyÕn ®i qua ®iÓm A(-1;4) §s: y=-x+2, y = -9x + 18

**D¹ng 3. Ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn cã hÖ sè gãc cho tr­íc**

* §Ó lËp ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn cña hµm sè y = f(x) cã ®å thÞ (C) cã hÖ sè gãc k, ta cã hai c¸ch:

*C¸ch 1:*

*B­íc 1:* Gäi tiÕp ®iÓm lµ M (x0;f(x0)). Suy ra f’(x0) = k

*B­íc 2:* Tõ ®ã t×m ra ®­îc x0.

*B­íc 3:* ¸p dông d¹ng 1 ta t×m ®­îc tiÕp tuyÕn.

*C¸ch 2:*

*B­íc 1:* Gäi ®­êng th¼ng cã hÖ sè gãc k lµ d: y = kx + b

*B­íc 2:* §Ó d lµ tiÕp tuyÕn cña (C) th× hÖ sau cã nghiÖm 

*B­íc 3:* Tõ (2) ⇒ x. Thay vµo (1) suy ra b. Tõ ®ã viÕt ®­îc ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn.

*Chó ý:* Cho ®­êng th¼ng Δ: ax + by + c = 0, (a2 + b2 ≠ 0). Khi ®ã

* NÕu d song song víi Δ th× d cã d¹ng d: ax + by + m = 0, (m ≠ c).
* NÕu d vu«ng gãc víi Δ th× d cã d¹ng d: bx = ay + m = 0.

3. Cho hµm sè  cã ®å thÞ (C). ViÕt ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn víi ®å thÞ (C) trong c¸c tr­êng hîp:

a. TiÕp tuyÕn song song víi Δ: x + y - 3 = 0 §s: y = -x+6, y = -x+2.

b. TiÕp tuyÕn vu«ng gãc víi Δ: 4x-y-7=0 §s: y = - 

**D¹ng 4. Hai ®­êng cong tiÕp xóc nhau**

4. t×m m ®Ó ®å thÞ hµm sè y = x3 - x2+ 5 vµ ®å thÞ hµm sè y = 2x2 + m tiÕp xóc nhau. X¸c ®Þnh to¹ ®é cña tiÕp ®iÓm. §s: m=1:A(2;9);m=5:B(0;5).

5. T×m a, b ®Ó ®å thÞ hµm sè  ®i qua ®iÓm A(3;1) vµ tiÕp xóc víi ®­êng th¼ng

2x-y-4=0 §s: a=10, b =-28; a=2; b =-4

6. T×m m ®Ó hai ®­êng cong  vµ y = 4x2 + 1 tiÕp xóc nhau. §s: m=4:M.

7. T×m m ®Ó hai ®­êng cong  vµ y = -x2 + a tiÕp xóc nhau. §s: a = 2: M(0;2).

**Bµi tập n©ng cao vÒ tiÕp tuyÕn.**

8. T×m trªn trôc tung nh÷ng ®iÓm mµ tõ ®ã cã thÓ kÎ ®­îc 3 tiÕp tuyÕn tíi ®å thÞ hµm sè

y = x3 - 3x+2. §s: Gäi A(0;a) ∈ Oy ⇒ 0<a<1.

9. T×m trªn trôc Ox c¸c ®iÓm tõ ®ã kÎ ®­îc 3 tiÕp tuyÕn ®Õn ®å thÞ hµm sè y = -x3 + 3x + 2

§s: a ∈

10. T×m nh÷ng ®iÓm trªn ®­êng th¼ng y = 1 sao cho tõ ®ã cã thÓ kÎ ®­îc ®óng mét tiÕp tuyÕn ®Õn ®å thÞ hµm sè (C):y =  §s: a = ±1, a = ±

11. Cho ®å thÞ hµm sè (C): y = x - 

a. Chøng minh r»ng trªn (C) tån t¹i v« sè nh÷ng cÆp ®iÓm mµ tiÕp tuyÕn t¹i ®ã song song víi nhau.

b. T×m m ®Ó ®­êng th¼ng d: y = m c¾t (C) t¹i hai ®iÓm A, B sao cho OA vu«ng gãc víi OB.

*H­íng dÉn:* T×m m ®Ó d c¾t (C) t¹i hai ®iÓm ph©n biÖt. §s: m = 

12. ViÕt ph­¬ng tr×nh tiÕp tuyÕn víi ®å thÞ hµm sè y = , biÕt tiÕp tuyÕn ®ã c¾t trôc hoµnh, trôc tung lÇn l­ît t¹i ®iÓm ph©n biÖt A, B sao cho tam gi¸c OAB c©n t¹i gèc to¹ ®é O.

*H­íng dÉn:* Gäi M (x0; y0) lµ tiÕp ®iÓm cña tiÕp tuyÕn cÇn t×m. §s: y = -x - 2

**1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC**

1. Không dùng máy tính, hãy thực hiện các phép tính sau

**a)** A = 81-0,75 +  **b)****c)** 

1. Rút gọn biểu thức

**a) ,** a> 0 **b) ,** b > 0

**c)  d)  e) **

1. Rút gọn các biểu thức sau:

**a)  b)**  (ab ≠0; a ≠ ±b)

1. Trục căn ở mẫu số của các biểu thức sau:

**a) ,** (a>0, b>0) **b)  c)  d) **

1. Tìm các số thực α sao cho:

**a)  b) **

1. So sánh các số:

**a) ** và ** b\*) ** và ** c\*) ** và ****

1. Viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ các biểu thức sau:

**a)  b) ,** a > 0  **c)  d) ** (ab > 0)

1. **(\*)** Chứng minh rằng:

**a)  b) **

**ĐÁP SỐ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC**

1a)  1b)  1c) 12

2a) a 2b) b 2c) (a - 5)2 2d) -9a2b 2e) - 

3a) 9a 3b) 

4a)  4b)  4c) +  4d) 

5a) a ≠ 1 : α = 0, a = 1 : α ∈ R 5b) α∈ (-3; 3)

6a) < 6b) > 6c) <

7a)  7b)  7c)  7d)  8a) 7 ± 5

**BÀI KIỂM TRA 1. LŨY THỪA**

Rút gọn các biểu thức từ 1-9 sau đây:

1. (1 điểm) A= , a>0, b>0
2. (1 điểm) B= với a=, b=.
3. (1 điểm) C=
4. (1 điểm) D=  
5. (1 điểm) E=
6. (1 điểm) F=
7. (1 điểm) G=
8. (1 điểm) H=
9. (1 điểm) I=
10. (1 điểm) Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo ***thể thức lãi kép***, tức là nếu đến kì hạn người đó không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp, kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền người đó thu được sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

**2. LÔGARIT**

**Dạng 1 : Sử dụng định nghĩa để tính lôgarit**

1. a) Nêu định nghĩa lôgarit

b) Cho 0 < a ≠ 1 , b > 0 Chứng minh rằng :

 =1 1

 = b

 = b

 = 0

I) II) III) IV)

1. Sử dụng định nghĩa lôgarit tính các giá trị sau :

a)  b)  c)  d) 

3. Tìm x biết :

a)  b)  c)  d) 

4. Tính giá trị các biểu thức sau đây :

a)  b)  c)  d) 

**Dạng 2 : Sử dụng các qui tắc để tính lôgarit**

5. Cho . Tính  ;  ;  và  . Từ đó suy ra các

đẳng thức bằng nhau giữa chúng .

1. Cho 0 < a 1 ,  > 0 ,  > 0 . Chứng minh các công thức tính lôgarit sau:





a) b)

1. Tính giá trị của các biểu thức sau đây :

a)  b)  c) 

8. Khẳng định “”đúng hay sai? Vì sao?

9. Tìm x biết rằng :

a)  b) 

10. Cho 0 < a ≠ 1 , b > 0. Chứng minh rằng Từ đó suy ra





a) b)



1. Tính giá trj các biểu thức sau:

a)  b) c)  d) 

1. a) Cho a > 0, b > 0, c > 0, d > 0. Tính 

b) Cho b + c > 0, d – e > 0. Tính 

**Dạng 3 : Sử dụng công thức đổi cơ số để tính lôgarit**



13. Cho 0 < a ≠ 1, b > 0. Chứng minh rằng với mọi  Từ đó hãy suy ra các công thức đổi cơ số sau:







a) b) c)

1. Áp dụng bài trên, tính giá trị các biểu thức sau:

a)  b)  c) 

15. Rút gọn biểu thức

a)  b) 

**Dạng 4 : So sánh hai lôgarit cùngcơ số**

1. Cho 0 < a ≠ 1, b > 0, c > 0. Chứng minh rằng :

a) Khi a > 1 thì b) Khi 0 < a < 1 thì





1. Từ bài trên hãy suy ra rằng :

a) Khi a < 1 thì  b) Khi 0 < a < 1 thì 

c) 

1. Các lôgarit sau đây âm hay dương?

a)  b)  c)  d) 

19. So sánh các số sau đây

a)  và  b)  và  c)  và  d)  và 

20. Cho 0 < a ≠ 1. Tìm giá trị của các biểu thức

a)  b)  c) 

21. Tìm giá trị bằng số của các biểu thức

a)  b)  c)  d) 

22. Cho 0 < a ≠ 1. Tìm giá trị bằng số của các biểu thức

a)  b)  c) 

**Dạng 5 : Bài tập tổng hợp**

23. Tìm , nếu .

24. Giả sử các biểu thức đã cho có nghĩa. Chứng minh :

a)  b) 



25. Kí hiệu .Cho biết . Hãy tính :

a) lg9000 b) lg0.000027 c) 

**ĐÁP SỐ VẤN ĐỀ 2 : LÔGARIT**

2a) 2 2b)  2c) -2 2d)  3a) x = 100 3b) x = 9 3c) x =  3d) x = 4

4a) 25 4b) -3 4c)  4d) 9 7a) 2 7b)  7c) -1 9a) x = -8 9b) x = 3

11a)  11b) 11c) -4 11d) 2 12a) 12b) 

14a)  14b)  14c)  15a)  15b) .

18a) dương 18b) dương 18c) dương 18d) âm

19a) lớn hơn 19b) bé hơn 19c) lớn hơn 19d) lớn hơn

20a)  20b) 2 20c)16 20d) 9 21a)  21b) 2 21c) 16 21d) 9

22a) 16 22b) 1 22c) 25 23)  25a) 3,954 25b) -4.569 25c) 0.954

**BÀI KIỂM TRA 2.LÔGARIT**

*Thang điểm : 15 điểm*

1. (1điểm) Trình bày trí nhớ các công thức mũ và lôgarit đã học
2. (3điểm) Tính các lôgarit sau đây:

a)  b) log­9 c) log3

d) e)  g) 

1. (3điểm) Tính giá trị của các biểu thức sau đây

a)  b)  c) 

d)  e)  g) 

1. (1điểm) Cho a và b là các số dương. Tìm x biết rằng

a)  b) 

1. (2điểm) Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  b) 

c)  d) 

**6.** (2điểm) So sánh các cặp số sau đây

a)  và  b)  và 

**7.** (3điểm) a) Cho  Hãy tính  theo a.

b) Cho  , , . Hãy tính  theo p , q , r.

c) Cho  . Chứng minh rằng ab+5(a-b)=1.

3. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

**Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lôgarit**

* *Hàm số lôgarit* là hàm số có dạng y = loga x với điều kiện 0 < a .
* Hàm số lôgarit y = loga x xác định khi x > 0.

**1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) y = log8 (x­2 – 3x – 4 ); b) y = log (-x2 + 5x + 6); c) y = log ;

d) y = log0,7 . e) y = log2 (3x – 1 – 9); g) y = 

Đs: a) D = (–;–1)( 4; +) ; b) D = (–1;6 ); c) D = (–;–5) (4;+)

d) D = (–3; –2)(2;+); e) D = (3; +); g) D = (0;64) (64;+).

**Dạng 2 : Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số**

* *Hàm số mũ* là hàm số có dạng y = với điều kiện 0 < a .
* Hàm số mũ y =  và hàm số lôgarit y = loga x cùng *đồng biến* khi và chỉ khi a > 1, và cùng *nghịch biến* khi và chỉ khi 0 < a < 1.
* Chú ý rằng loge x := ln x đọc là lốc-nê-pe của x, với hằng số e  2,718.

**2.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của nó? Vì sao?

a) y =  b) y = log c) y =  d) y = log x

Đs: a) Đồng biến b) Nghịch biến c) Nghịch biến d) Đồng biến

**Dạng 3. Tìm giới hạn của hàm số mũ và lôgarit**

***Phương pháp:*** Sử dụng các công thức









Chú ý rằng ln x := loge x, với e 2,718

**3.** Tìm các giới hạn sau:

a) **** b)  c) 

 d)  e) 

Đs: a) -3e b) – 3 c) 3 d) 0 e) 1

**Dạng 4. Tìm đạo hàm của hàm số mũ, hàm số logarit và hàm số lũy thừa**

* Ta có công thức tính đạo hàm số mũ:

a) (e) = e; b) (e = e; c) (a = a.ln a; d) (a) = a.u’.ln a.

* Ta có công thức tính đạo hàm của hàm số lôgarit:

a) (ln x)’ = ; b) (ln u)’ = ; c) (loga x)’ = ; d) (loga u)’ = ;

* Đạo hàm của hàm số mũ:

a) (x)’ = a.x; b) (u)’ = a.u.u’.

* Chú ý rằng

**4.** Tìm đạo hàm của hàm số mũ:

a) y = (x)e b) y = e c) y = ln(2x)

d) y = x e) y =  g) y = ln(x)

h) y = (3x – 2)ln i) y = x ln k) y = 

Đs: a) 2(x)e b) sin2x c) 

d)  e)  g) 

h) 3 ln i)  k) 

**Dạng 4. Tìm đạo hàm của hàm số lũy thừa**





***Phương pháp*** : Sử dụng các công thức và

**5.** Tính đạo hàm của các hàm số sau đây:

a)  b) y =  c) y = 

d) y =  e) y = 

**Dạng 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số mũ và lôgarit**

**6.** Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau đây:

a) y = () b) y =  c) y = logx d) y = log

**Bài tập tổng hợp**

**7.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) y = ln(2) b) y = log c) y = 

d) y =  e) y = ln g) y = 

h) y = 10 i) 3



**4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ**

**Dạng 1. Phương trình mũ cơ bản**

* *Phương trình mũ cơ bản* là phương trình có dạng ax=b trong đó a>0, a0
* *Cách giải:* nếu b0 thì phương trình ax=b vô nghiệm, Nếu b>0 thì phương trình có nghiệm duy nhất.

**1.** Giải phương trình

a) ; Đáp số: x =3; x = -2. b) 5x =100; Đáp số: x =2 +log, 4 c) 2.3x -6.3x-1=9 Đáp số: x .

**Dạng 2. Sử dụng phương pháp đưa về cùng một cơ số**

* *Chú ý*rằng ax=ay  x = y, trong đó a>0, a1.

**2.** Giải phương trình

a) 9x+1 =272x+1; *Đáp số: x=* b) 0.125.42x-3 =; *Đáp số:* x =6.

**Dạng 3. Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ**

**3.** Giải phương trình

a) 32x+5 = 3x+2 + 2; *HD* Đặt t =3x >0. ĐS x = -2; b) 27x + 12x = 2.8x *HD:* Chia hai vế cho 27x.  *Đáp số:* x= 0

**Dạng 4. Sử dụng phương pháp lôgarit hóa (lấy lôgarit hai vế)**

* X ét pt ax =by  trong đ ó a>0, a1; b>0, b1. Lấy lôgarit cơ số a hai vế của pt ta được x=y logb.

**4.** Giải phương trình

a) =3-x ( *Hướng dẫn:* lôgarit cơ số 2 hai vế.)b) 3x-1.  = 8.4x-2 *Đáp số:* x = 1, x = 1-log3.

**Dạng 5. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số mũ**

* Nếu a>1 thì ax > ay   x > y. Nếu 0 < a < 1 thì ax>ay x < y.

**5.** Giải phương trình

a) 3x + 4x = 5x; *(*. *ĐS*: x = 2) b) x2 –(3 – 2x)x + 2(1 – 2x) =0 (*HD: Coi là pt b*ậc 2 ẩn x. Đáp số:x=0; x=2 )

**Dạng 6. Bất phương trình mũ**

**6.** Giải bất phương trình

a) >4 ( *Đáp số*: 2<x<3). b) 4x - 2.5 2x <10x. *HD:* Chia hai vế cho 10x

**Dạng 7. Hệ phương trình mũ**

**7.** Giải bất phương trình

a)  ; *ĐS:* (1;2) ; (2;1). b)(TSĐH, D, 2002) ; Đáp số: (0;1) ; (2;4).

**BÀI KIỂM TRA 4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ**

1. Giải phương trình

a) ; b) ;



c) .

1. Giải phương trình

a) ; b) ;

1. Giải phương trình

a) ; b) ;

c) ;

**4.** Giải phương trình

a) ; b) ;

1. Giải phương trình



a)  b) ;

**6.** Giải bất phương trình

a) ; b) ;

**7.** Giải hệ phương trình

a) ; b) .

**5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT NÂNG CAO**

**A. Các dạng toán về phương trình mũ**

**Dạng 1. Phương pháp biến đổi tương đương**

**1.** Nêu cách giải các phương trình mũ dạng cơ bản sau

a) af(x) = b với 0 < a ≠ 1 b) af(x) = ag(x\_) với 0 < a ≠ 1

*Giải các phương trình sau:*

***2.*** *5x* + 5x+1 + 5x+2 = 3x + 3x+3 – 3x+1 Đáp số: 

**3.** 2x + 2x-1 + 2x-2 = 3x – 3x-1 + 3x-2 Đáp số: x = 2

**4.**  Đáp số: x ∈ ∅

**5.**  Đáp số: x = 3

**6.**  Đáp số: 

**7.**  Đáp số: 

**Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ**

**8.**  Đáp số: x=-1; x=2.

**9.** Cho phương trình 

a) Giải phương trình khi m = 6 Đáp số: 

b) Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt trong  Đáp số: m > 2.

**10.** Tìm a để phương trình sau có nghiệm

 Đáp số: 

**11.** Tìm m để  có nghiệm. Đáp số: 

**Dạng 3: Bất phương trình mũ**

**12.**  Đáp số: 0 < x ≤ 2. **13.**  Đáp số: x ≥ 2.

**14.**  Đáp số: 

**15.**  Đáp số: 

**16.**. Đáp số: x ≤ 2.

**B. Các dạng toán về phương trình lôgarit**

**Dạng 4. Phương pháp biến đổi tương đương**

**17.** Nêu cách giải phương trình dạng loga f(x) = logag(x).

Giải các phương trình sau:

**18.**  log2 (25x+3-1)=2+log2(5x+3+1) Đáp số: x=-2.

**19.**  Đáp số: x=1

**20.** Tìm m để pt  có nghiệm thuộc (0;1)Đáp số:

**21.** Cho f(x) = xlog22 với 0 < x ≠ 1. Tính f’(x) và gbpt: f’(x) ≤ 0. Đáp số: 

**Dạng 5: Phương pháp đặt ẩn phụ**

*Giải các phương trình sau:*

***23.*** logx-1 = 4 = 1 + log2 (x-1) ĐS:  **24.** (x+1).(log3x)2+4x.log3 x - 16=0 ĐS: 

**25.** log2 (2x +1).log2(2x+1+2)=6 Đáp số: x=log23

**26.** Cho phương trình 

a) Giải phương trình khi m = 2. Đáp số: 

b) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn  Đáp số: 0 ≤ m ≤ 2

**Dạng 6. Đoán nghiệm và chứng minh nghiệm đó là duy nhất**

*Giải các phương trình sau:*

***27.*** lg(x2+x-6)+x2+x-3=lg(x+3)+3x ĐS: x=3

**Dạng 7. Bất phương trình logarit**

*Giải các phương trình sau:*

***28.***  Đáp số: x≥3

**29.**  Đáp số: 

30.  Đáp số: x≥2

**Dạng 8. Hệ phương trình mũ và logarit**

*Giải các hệ phương trình sau:*

***31.***  Đáp số: (0;1); (2;4) **32.**  Đáp số: (4;4)

**33.**  Đáp số: (4;4)

**34.**  Đáp số: (1;1), (9;3)

**35.**  Đáp số: 

**HÌNH HỌC**

**VẤN ĐỀ 1.HỆ TOẠ ĐỘ,TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM,**

**TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN.**

1. *Định nghĩa hệ toạ độ Đêcac vuông góc trong không gian ?*
2. *Nêu định nghĩa và các tính chẩt về toạ độ của vectơ trong không gian ?*
3. *Nêu định nghĩa và các tính chất về toạ độ của điểm trong không gian ?*
4. *Nêu phương pháp xét tính thẳng hàng của ba điểm A,B,C trong không gian ?*

**Dạng 1. tìm toạ độ của vectơ**

1. Viết toạ độ của các vectơ = ;  ; .
2. Viết dưới dạng  các vectơ ;  ; 
3. Cho 3 vectơ , , . Tìm tọa độ của vectơ

 và .

1. Tìm tọa độ vectơ  biết rằng

a)  ; b) .

**Dạng 2. Tích vô hướng của hai vectơ**

1. Cho ba vectơ . Tìm tọa độ các vectơ và

.

1. Tính góc giữa hai vectơ  và .

**Dạng 3. Tìm tọa độ của điểm**

1. Cho điểm *M* 
   1. Biểu diễn điểm *M* trong hệ tọa độ *Oxyz*.
   2. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm *M* trên các mặt phẳng tọa độ.
   3. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm *M* trên các trục tọa độ.
   4. Tìm tọa độ của điểm đối xứng với điểm *M* qua gốc tọa độ .
   5. Tìm toạ độ của điểm đối xứng với điểm *M* qua mặt phẳng *Oxy*.
   6. Tìm tọa độ của điểm đối xứng với điểm *M* qua trục *Oy*.
2. Cho hình hộp *ABCD .A’B’C’D’* biết *A*(1;0;1), *B*(2;1;2), *D*, *C’*.

Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

**Dạng 4. Xét tính thẳng hàng của ba điểm**

1. Xét tính thẳng hàng của hai bộ ba điểm sau đây:

a) *A*(1;3;1), *B*(0;1;2), *C*(0;0;1); b) *A*(1;1;1),*B*(),*C*().

**Dạng 5. Điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số *k***

1. Cho toạ độ hai điểm *A*() và *B*(). Tìm toạ độ điểm *M* sao cho *M*

chia đoạn thẳng *AB* theo tỷ số *k*=.

1. Cho điểm *A*(,*B*(.Đường thẳng *AB* cắt mặt phẳng *Oyz* tại điểm *M.*

hỏi điểm *M* chia đoạn thẳng *AB* theo tỷ số nào và tìm toạ độ điểm *M*.

**Dạng 6. Bài toán liên quan đến tam giác**

1. Cho ba điểm *A*(1;0;1) , *B*(0;0;1) ; *C*(2;1;1).

a) Tính chu vi tam giác *ABC*;

b) Tìm toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*;

c) Tính các góc của tam giác *ABC*;

d) Tính diện tích của tam giác *ABC*;

e) Tìm toạ độ đỉnh *D* để tứ giác *ABCD* là hình bình hành;

g) Tính độ dài đường trung tuyến của tam giác *ABC* đi qua *A*;

h) Tính độ dài đường cao của tam giác *ABC* hạ từ đỉnh *A*;

i) Tính độ dài đường phân giác trong góc *A* của tam giác *ABC*.

**Dạng 7. Bài toán liên quan đến độ dài đoạn thẳng**

1. Cho điểm *A*(3;1;0), *B*(. Tìm điểm *C Oy* sao cho *CA*=*CB*.
2. Cho điểm *A*(1;1;1), *B*(, *C*(3;1;.Tìm điểm *M Oxz* sao cho

*MA*=*MB*=*MC.*

**ĐÁP SỐ**

7.  8. a) ( , b)  9. a) (9;6;, b) (35;

10. *arc cos* 11. b) (c) (d) (,

e) ( g) (1;2;3).

12. *C* (2;0;2), *A’*(, *B’*( 4;6;, *D’*(3;4;

13. a) Không thẳng hàng , b) Thẳng hàng .

14. *M*15. *k*=; *M*(0;

16. a)  b)  c) *A*=, cos *B*= , cos *C*=

d)  e) (1;1;2); g) h)  i) *D*, *AD*=

17.  18. 

**BÀI KIỂM TRA VẤN ĐỀ 1.**

**HỆ TỌA ĐỘ, TỌA ĐỘC CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM**

1. Cho vectơ  = (1;2;3),  = (2;2;-1),  = (4;0;-4). Tìm tọa độ của vectơ 

2. Cho vectơ  = (1;2;3),  = (2;2;-1),  = (4;0;-4). Tìm tọa độ của vectơ  sao cho 2 +  -  + 3 =

3. Chỉ ra bộ ba điểm A, B, C thẳng hàng trong những bộ sau:

a) A(1;3;1), B (0;1;2), C (0;0;1); b) A (0;-2;5), B (3;4;4), C (2;2;1)

4. Trong các vectơ  = (6;4;10),  = (2;),  = (1;-4;2),  = (-6;-4;10), vectơ nào cùng phương với vectơ  = (3;2;-5)

5. Trong các vectơ sau  = -6 + 8 + 4k,b = 4 + 2k,c = - 4 + 2k, vectơ nào cùng phương với vectơ x có điểm đầu là A (1;-1;3) và điểm cuối là B (-2;3;5).

6. Cho vectơ  (3;-5;6) có tọa độ điểm đầu là (0;6;2). Tìm tọa độ điểm cuối của vectơ 

7. Cho vectơ  (1;1;1) có tọa độ điểm cuối là (2;1;4). Tìm tọa độ điểm đầu của vectơ .

8. Tìm m để hai vectơ  = (1;m;-1) và  = (1;2;3) vuông góc với nhau

9. Cho tọa độ bốn điểm A (5;2;-1), B (1;-3;4), C (-2,1;3), D (2;6;-2). Tứ giác ABCD là hình gì?

10. Cho tọa độ bốn điểm M (4;2;-6), N (5;-3;1), P (12,4;5), Q (11;9;-2). Tứ giác MNPQ là hình gì?

11. Tìm tọa độ đỉnh D để tứ giác ABCD là hình bình hành biết A (1;0;0), B (0;0;1), C (2;1;1).

12. Tính góc B của tam giác ABC biết tọa độ ba đỉnh A (1;0;0), B (0;0;1), C (2;1;1).

13. Tính góc giữa hai cạnh đối AB và CD của tứ diện ABCD có A (1;1;0), B (0;2;1), C (1;0;2), D (1;1;1).

14. Tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện ABCD biết A (1;1;0), B (0;2;1), C (1;0;2), D (1;1;1).

15. Trong không gian cho ba vectơ  (3;-2;4),  (5;1;6),  (-3;0,2). Tìm vectơ x thỏa mãn  = 4, = 35,  = 0.

16. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết A (1;1;0), B (0;2;1), C (1;0;2), D (1;1;1).

17. Cho tứ diện ABCD với A (2;3;1), B (4;1;-2), C (6;3;7), D (-5;-4;8). Tìm tọa độ điểm I cách đều bốn điểm A,B,C,D.

18. Cho  = (-1;2;3),  = (2;-3;4),  = (3;4;-5) và  = (-4;5;-1). Hay phân tích vectơ  theo ba vectơ .

19. Cho điểm A (1;-1;0), B (0;-2;3). Tìm tọa độ điểm M biết rằng M chia đoạn thẳng AB theo tỷ số k =-3.

20. Tìm vectơ  có độ dài bằng 2, tạo với vectơ  (1;1;1) góc 300, tạo với vectơ  (1;1;0) góc 450.

**VẤN ĐỀ 2. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ**

1. *Nêu định nghĩa tích có hướng của hai vectơ?*

*Giải:* Cho hai vec tơ , . Khi đó tích có hướng của  và , ký hiệu là , và được xác định như sau:

.

1. *Nêu các tính chất về tích có hướng của hai vectơ?*

*Giải:*

* + Nếu  và  cùng phương thì 
  +  và 
  + 
  1. *Nhắc lại khái niệm ba vectơ đồng phẳng? Nêu các điều kiện cần và đủ ba vectơ đồng phẳng?*

*Giải:* ba vec tơ  và  đồng phẳng 

* 1. *Nêu công thức tính diện tích tam giác ABC bằng việc sử dụng tích có hướng?*

*Giải:* .

* 1. *Nêu công thức tính thể tích tứ diện ABCD?*

*Giải:* .

* 1. *Nêu công thức tính thể tích hình hộp ABCD.A’B’C’D’?*

*Giải:* .

* 1. Tính tích có hướng của hai vectơ
     1.  . Đs: 
     2.  . Đs: 
  2. Cho , . Chứng minh rằng:
     1. Hai vectơ và  cùng phương.
     2. Tích có hướng của hai vectơ  và  là 
  3. Tính tích hỗn tạp  biết rằng  Đs: 0
  4. Cho hai vectơ  Chứng minh rằng:
     1. Tích có hướng của hai vectơ  và  vuông góc với từng vectơ thành phần.
     2. . Đs: 
  5. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ  và  và  trong các trường hợp sau đây:
     1. . Đs: Không
     2. . Đs: Có
  6. Tìm m để ba vectơ  và  và  đồng phẳng?
     1. . Đs: m
     2. . Đs: m, m
  7. Cho *ba* điểm A, B, C.
     1. Chứng minh rằng *A, B, C* là ba đỉnh của một tam giác.
     2. Tính diện tích của tam giác *ABC.*
  8. Cho hình hộp *ABCD.A’B’C’D’* biết A, B, D, C’. Tính thể tích của hình hộp. Đs: V
  9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho bốn điểm A, B, C, D.
     1. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện. Đs: 

*Hướng dẫn:* Chứng minh ba vectơ , ,  không đồng phẳng.

* + 1. Tính diện tích tam giác BCD. Đs: S(BCD)
    2. Tính đường cao của tam giác BCD hạ từ đỉnh D. Đs: DK
    3. Tính cosin góc CBD Đs:
    4. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Đs: 

1. Tính thể tích tứ diện ABCD. Đs: V
2. Tính độ dài đường cao của tứ diện qua đỉnh A. Đs: AH
3. Cho bốn điểm A, B, C, D
   1. Chứng minh bốn điểm A, B. C. D lập thành một tứ diện.
   2. Tìm góc tạo bởi các cạnh đối diện AC và BD của tứ diện. Đs: 
   3. Tính thể tích tứ diện. Đs: V
   4. Tính độ dài đường cao của tứ diện hạ từ A. Đs: AH

**BÀI KIỂM TRA VẤN ĐỀ 2. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ**

1. Tính tích có hướng của hai vectơ =(1;2;**-**3), =**(-**4;1;2).
2. Tính tích có hướng của hai vectơ = 3+ 2-, =-- 3+ .
3. Tính tích hỗn tạp [ ], biết rằng =(-3;1;-2), =(1;1;1), =(-2;2;1).
4. Xét tính đồng phẳng của các vectơ ,,, biết rằng =(1;2;3), =(3;-1;2), =(2;3;-1).
5. Tính thể tích tứ diện *ABCD,* biết rằng
6. Tính chiều cao *DH* của tứ diện *ABCD* kẻ từ đỉnh *D,* biết rằng *A* (2;3;1), *B*(4;1;-2), *C*(6;3;7),

*D*(-5;-4;8).

1. Tìm để ba vectơ ,, đồng phẳng, trong đó =(1;*m*;2),=(*m*+1;2;1), =(0;m-2;2).
2. Tính diện tích tam giác *ABC*, biết rằng *A*(1;2;-1), *B*(2;-1;3), *C*(-4;7;5).
3. Tính độ dài đường cao *AH* của tam giác *ABC*, biết rằng *A*(1;2;-1), *B*(2;-1;3), *C*(-4;7;5).
4. Tính thể tích của hình hộp  biết rằng (1;0;1), (2;1;2), (1;-1;1), (4;5;-5).

* + [;] = = (-;-;-).
  + Ba vectơ , và  đồng phẳng [;]=0.
  + Cho tam giác *ABC*. Khi đó ta có = .
  + Cho hình hộp . Khi đó = .
  + Tính thể tích tứ diện = .

**VẤN ĐỀ 3. MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN**

**Tự đọc SGK và trả lời các câu hỏi sau:**

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là gì ?

* Vectơ  gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng () khi và chỉ khi ().

1. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng là gì ?
   * Cặp vectơ , gọi là cặp vectơ chỉ phương của (), không cùng phương và , song song hoặc nằm trên ().
2. Nếu , là cặp vectơ chỉ phương của () thì vectơ pháp tuyến của () xác định thế nào ?

* Nếu , là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng () thì =  là vectơ pháp tuyến của ().

1. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm M( x0­­ ; y0 ; z0 ) và có vectơ pháp tuyến = ( a; b; c) có dạng thế nào ?

* Phương trình mặt phẳng () đi qua điểm M( x0; y­0; z0 ) và có vectơ pháp tuyến = ( a; b; c) có dạng là

|  |
| --- |
| a( x – x0 ) + b( y – y0 ) + c( z – z0 ) = 0 |

1. Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm A (a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), (abc0) có dạng thế nào ?

|  |
| --- |
|  |

* Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A(a; 0; 0),B(0; b; 0),C(0; 0; c), (abc0) có dạng

Phương trình này gọi là phương trình theo đoạn chắn.

1. Nêu vị trí tương đối của hai mặt phẳng và cách xác định ? Xem dạng 2.
2. Nêu phương trình chùm mặt phẳng ? Xem dạng 3\*.
3. Nêu công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng? Xem dạng 4.
4. Nêu công thức tính góc giữa hai mặt phẳng ? Xem dạng 5.

* ()a1a2+b1b2+c1c2=0

**DẠNG 1. Viết phương trình mặt phẳng**

**Loại 1. Viết phương trình mặt phẳng () đi qua điểm M(x0; y0; z0) và vectơ pháp tuyến = ( a; b; c)**

**Cách giải:**

**Bước 1: Tìm vectơ pháp tuyến  (nếu chưa cho sẵn).**

|  |
| --- |
| **a( x – x0 ) + b( y – y0 ) + c( z – z0 ) = 0** |

**Bước 2: Sử dụng công thức**

1. Viết phương trình mặt phẳng () đi qua điểm M(2; -3; 4) và thỏa mãn điều kiện sau:

a) Có vectơ pháp tuyến **=**(2; -3; 1) Đs: -2x + 3y + z + 9 = 0.

b) Vuông góc với trục Oy. Đs: y + 3 = 0.

c) Vuông góc với NP với N(0; 2; -3),P( 2; -1; 3) Đs: 2x – 3y +6z – 37 = 0.

d) Song song với mặt phẳng(P):2x – y + 3z + 4 = 0 Đs: 2x – y + 3z – 19 = 0.

**Loại 2. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB**

**Cách giải:**

**Bước 1: Tìm tọa độ điểm I là trunng điểm AB theo công thức**

,,

**Bước 2: Mặt phẳng trung trực của AB đi qua I nhận  làm vectơ pháp tuyến.**

1. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của AB trong các trường hợp sau

a) A( 2; 3; -4), B( 4; -1; 0). Đs: x – 2y + 2z + 3 = 0

b) A( -1; 2; 3), B(0; 3; -1). Đs: x + y – 4z +2 = 0

**Loại 3. Viết phương trình mặt phẳng () đi qua điểm A và có cặp vectơ chỉ phương ,**

**Cách giải:**

**Bước 1: tính vectơ = làm vectơ pháp tuyến.**

**Bước 2: Mặt phẳng () đi qua điểm A nhận = làm vectơ pháp tuyến.**

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và có cặp vectơ chỉ phương **,** trong các trường hợp:

a) A( 1; -2; 1), **=** ( 1; 0; 1), ** =** ( 2; 1; 0). Đs: x – 2y – z – 4 = 0.

b) A( -2; 3; -2), **=** ( -2; 4; 3), ** =** ( 2; -4; -5) Đs: 2x + y +1 = 0.

**Loại 4. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C**

**Cách giải:**

**Bước 1.Tính ,. Từ đó tính =**

**Bước 2. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A nhận = làm vectơ pháp tuyến.**

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ban điểm A, B, C trong các trường hợp:

a) A(3; -1; 5), B(4; 2; -1), C(1; -2; 3). Đs: 12x – 14y – 5z – 25 = 0.

b) A(-1; 2; 3), B(2; -4; 3), C(4; 5; 6). Đs: 6x + 3y - 13z + 39 = 0.

c) A(2; 0; 0), B(0; -1; 0),C(0; 0; 3). Đs: 3x – 6y + 2z – 6 = 0.

1. Cho điểm A(2; 3; 4). Hãy viết phương trình các mặt phẳng qua các hình chiếu của A trên:

a) Các trục tọa độ Đs: 6x + 4y + 3z -12 = 0.

b) Các mặt tọa độ Đs: 6x + 4y - 3z - 24 = 0.

**Loại 5. Viết phương trình mặt phẳng () đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng ( P ), ( Q ).**

**Cách giải:**

**Bước 1: Tính các vectơ pháp tuyến ,  của hai mặt phẳng ( P ), ( Q ).**

**Bước 2: Vì mặt () vuông góc với hai mặt phẳng ( P ) và ( Q ) nên ,  là cặp vectơ chỉ phương của ()**

**Bước 3: Áp dụng loại 3.**

1. Viết phương trình mặt phẳng () đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng ( P ) và ( Q ) trong những trường hợp :

a)A(-1; -2; 5),(P): x + 2y - 3z + 1 = 0,(Q): 2x – 3y + z + 1 = 0 Đs: x + y + z – 2 = 0

b)A(1; 0; -2),(P): 2x + y – z – 2 = 0,(Q):x – y – z – 3 = 0 Đs: 2x- y + 3z + 4 = 0

**Loại 6. Viết phương trình mặt phẳng () đi qua điểm A, B và vuông góc với hai mặt phẳng ( P ).**

**Cách giải:**

**Bước 1: Vì mặt () đi qua điểm A, B và vuông góc với hai mặt phẳng ( P ) và ( Q ) nên () có cặp vectơ chỉ phương là , .**

**Bước 2: Áp dụng loại 3.**

1. Viết phương trình mặt phẳng () đi qua điểm A, B và vuông góc với hai mặt phẳng ( P ) trong những trường hợp sau:

a) A(3; 1; -1), B( 2; -1; 4), (P): 2x – y + 3z – 1 = 0 Đs: x – 13y – 5z + 5 = 0

b) A(8; -3; 1), B( 4; 7; 2), (P): 3z + 5y – 7z – 21 = 0 Đs: 3x + y + 2z – 23 = 0

1. Hãy viết ptmp qua M( 2; -1; 2), song song với Oy và vuông góc với (P): 2x – y + 3x + 4 = 0. Đs: 3x – 2z – 2 = 0

**DẠNG 2. Xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng**

**Cách giải:**

**Cho hai mặt phẳng (): a1x + b1y + c1z + d1 = 0, ** **a2x+ b2y + c2z + d2 = 0. Khi đó:**

**a)  cắt  a1 : b1 : c1  a2 : b2 : c2.**

**b)  song song .**

**c)  trùng .**

1. Xét tính tương đối của các cặp mặt phẳng cho bởi phương trình sau đây

a) : x + 2y – 7z – 4 = 0, ****: 2x + 3y – 7z – 4 = 0.

b) : x – 2y + z + 3 = 0, ****: 2x – 4y + 2z + 6 = 0.

c) : x + y + z – 1 = 0, ****: 2x + 2y + 2z + 3 = 0.

1. Tìm a và b để các mặt phẳng sau đây song song với nhau

a) : 2x + ay + 2z + 3 = 0, ****: bx + 2y – 4z + 7 = 0 Đs: a = -1, b = -4

b) : 2x + y + az - 2 = 0,:x + by + 2z + 8 = 0 Đs: a = 4, b = 

1. Biện luận theo m vị trí tương đối của hai măt phẳng : 2x – my + 3z - 6 = 0 và

: ( m+ 3)x - 2y + ( 5m + 1)z - 10 = 0. Đs: m = 1: , m1: 

**DẠNG 3\*. Chùm mặt phẳng và ứng dụng để giải toán**

**Cách giải:**

* **Cho hai mp (): a1x + b1y + c1z + d1 = 0, ** **a2x+ b2y + c2z + d2 = 0 cắt nhau, tức là a1 : b1 : c1  a2 : b2 : c2. Khi đó mọi mặt phẳng đi qua giao tuyến của () và  gọi là chùm mặt phẳng.**
* **Pt chùm mp tạo bởi () và  ở trên có dạng: m(a1x + b1y + c1z + d1) + n(a2x+ b2y + c2z + d2) = 0, (m2 + n20)**

1. Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trưởng hợp sau

a) Đi qua A( 2; 1; -1) và qua giao tuyến của (): x – y +z – 4 = 0****: 3x – y + z – 1 = 0. Đs: 15x – 7y + 7z – 16 = 0.

b) Qua giao tuyến của (): y + 2z – 4 = 0, ****: x + y – z 3 = 0 và song song với : x + y + z – 2 = 0.Đs: Không có

c)Qua giao tuyến của : 3x - y + z - 2 = 0,****: x + 4y – 5 = 0 và  : 2x – z + 7 = 0.Đs: x – 22y + 2z + 21 = 0

1. Viết ptmp trìn đi qua giao tuyến của :2x –y +z +1= 0,****: x + 3y – z + 2 = 0 và thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) Đi qua điểm A( 1; 2; 1). Đs: 7x – 7y + 5z + 2 = 0.

b) Song song với trục Oy. Đs: 7x + 2z + 5 = 0.

c) Vuông góc với :-2x + 2y + 3z + 3 = 0 Đs: 5x + 8y – 2z + 7 = 0.

1. Tìm a và b để ba mặt phẳng sau cùng đi qua một đường thẳng:: 3x – 7y + z – 3 = 0

****: x – 9y – 2z + 5 = 0, : 5x + ay + 4z + b = 0 Đs: a = -5, b = -16.

**DẠNG 4. Tính khoảng cách**

**Loại 1.Tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng**

**Cách giải: Sử dụng công thức tính khoảng cách từ điểm M( x0­­ ; y0 ; z0 ) đến mặt phẳng : ax + by + cz + d = 0 là**

|  |
| --- |
|  |

1. Cho phương trình mặt phẳng (P): x + 2y + 2z – 10 = 0.Tính khoảng cách từ

a) Điểm A(1; -1; 2) đến mặt phẳng (P) Đs: d (A; (P)) = .b) Điểm B ( -2; 3; 3) đển mặt phẳng (P). Đs: d (B; (P)) = 0.

1. Tìm điểm M trên trục Oz cách đều A( 2; 3; 4) và () : 2x + 3y +z – 17 = 0. Đs: M ( 0; 0; 3).
2. Tìm điểm M trên trục Oy cách đều (): x + y – z + 1 = 0, : x – y + z – 5 = 0. Đs: M ( 0; -3; 0).

**Loại 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song**

**Cách giải:**

**Bước 1: Chọn một điểm M có tọa độ cụ thể nằm trên mặt phẳng** ()**.**

**Bước 2: Khi đó d (**();) **= d (** **M;** **).**

**Bước 3: Áp dụng loại 1**

1. Tính khoảng cách giữa (): x +2y+2z+11 = 0 và : x+2y+2z+2 = 0. Đs: d = 3
2. Tìm tập hợp các điểm M cách đều (): 2x – y + 4z + 5 =0, : 3x + 5y –z -1 = 0

Đs: x + y + z +  = 0.

**DẠNG 5. Tính góc giữa 2 mặt phẳng**

Cách giải: Cho hai mặt phẳng ():a1x +b1y +c1z +d1 = 0, :a2x +b2y +c2z +d2 =0 tạo với nhau 1 góc .Khi đó

|  |
| --- |
|  |

1. Tính góc giữa các mặt phẳng (): x + y – z + 1 = 0, : x – y + z – 5 = 0. Đs: cos =

**DẠNG 6. Sử dụng phương pháp tọa độ giải bài tập hình học không gian**

1. Cho tứ diện OABC có các mặt OAB, OBC, OCA là các tam giác vuông đỉnh O. Gọi ,, lần lượt là các góc hợp bởi các mp (OBC), (OCA), (OAB) với mặt phẳng (ABC). Bằng phương pháp tọa độ hãy chứng minh rằng:
2. Tam giác ABC là tam giác nhọn.
3. cos2 + cos2 + cos2 = 1.
4. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng 

Bµi kiÓm tra vÊn ®Ò 3. ph­¬ng tr×nh MÆt ph¼ng

1. Cho hai điểm *A*(2;-1;3), *B*(3;1;2) và  = (3;-1;-4). Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm *A, B* và song song với vectơ .
2. Cho hai điểm *A*(8;-3;4), *B*(4;7;2) và mặt phẳng (*P*): 3*x* + 5*y* – 7*z* – 21 = 0. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm *A, B* và vuông góc với mặt phẳng (*P*).
3. Viết phương trình mặt phẳng đi qua các điểm là hình chiếu của điểm *M*(2;-3;4) trên các trục toạ độ.
4. Xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng có phương trình là  và 
5. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình  và  và đi qua điểm M(1;2;1).

*Hướng dẫn:* Chọn hai điểm *A, B* phân biệt cùng thuộc mặt phẳng (*α*), (*β*) => *A, B* cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng này.

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình   và song song với trục Oy.
2. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình , 
3. Tìm các giá trị a và b để ba mặt phẳng sau đây cùng đi qua một đường thẳng: , 
4. Tìm điểm trên trục Oy cách đều hai mặt phẳng 
5. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng 